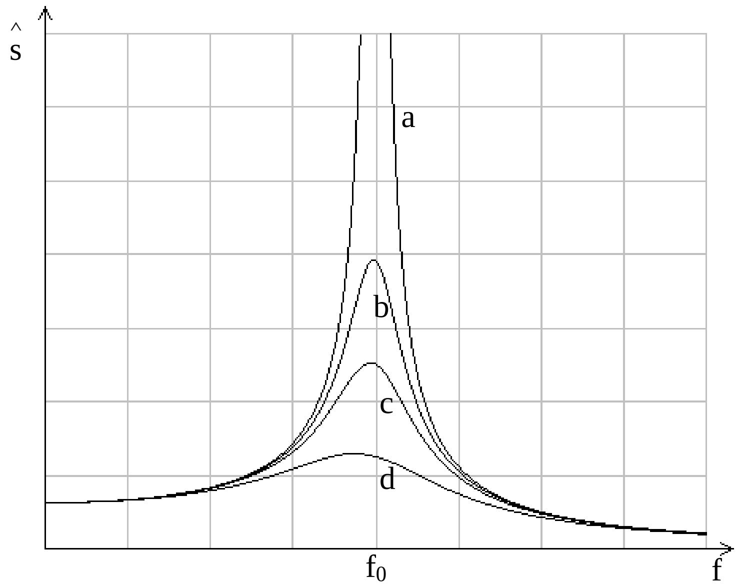
Erzwungene Schwingung

Versuch: Anregung einer Drehschwingung durch eine von „außen“ einwirkende periodische Kraft (Drehpendel). Messung der Schwingungsamplitude $\hat{s}$ in Abhängigkeit von der Frequenz f der erregenden Schwingung bei unterschiedlich starker Dämpfung.

Versuchsergebnis:



a: ohne Dämpfung
b: leichte Dämpfung
c: mittlere Dämpfung
d: starke Dämpfung

Mit zunehmender Dämpfung
- verringert sich die Amplitude im Resonanzfall
- verbreitert sich der Resonanzbereich
- verschiebt sich die Resonanzfrequenz zu kleineren Werten hin

Generalisierung der Resonanzerscheinung:
Es sind 2 schwingungsfähige Systeme vorhanden (Syst. 1 und Syst. 2) mit der Frequenz f_1 (variabel) und der Frequenz f_2 (Eigenfrequenz). Die Systeme sind gekoppelt. Resonanz, wenn $f_1 = n \cdot f_2$.

Lösung der Differentialgleichung für eine erzwungene Schwingung:

Erstellen der Bewegungsgleichung:

Auf das schwingungsfähige System wirkt die periodische Kraft $F = \hat{F} \cdot \sin(\omega t)$ ein. Dabei ist ω die Frequenz der einwirkenden periodischen Kraft.
Da die erzwungene Schwingung als gedämpft angenommen werden soll, lautet die Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \ddot{s}(t) + r \cdot \dot{s}(t) + D \cdot s(t) = \hat{F} \cdot \sin(\omega t) \qquad (1)$$

mit m als schwingende Masse, r als Konstante für die geschwindigkeitsabhängige Reibung und D als Direktionskonstante.

Gleichung (1) wird durch m dividiert:

$$\ddot{s}\cdot(t)+2k\cdot\dot{s}(t)+\omega_0^2\cdot s(t)=C\cdot\sin(\omega t) \qquad (2)$$

mit $2k=\dfrac{r}{m}$, $\omega_0^2=\dfrac{f}{m}$ und $C=\dfrac{\hat{F}}{m}$.

Lösungsansatz und Lösung für die Differentialgleichung:

$s(t)=\hat{s}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$ mit φ als Phasenwinkel. (3)

Um den zeitabhängigen Anteil (ωt) vom zeitunabhängigen Teil φ zu trennen, wird diese Gleichung mit dem Additionstheorem für sin-Funktionen

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

umgeformt zu:

$$s(t)=\hat{s}\cdot[\sin(\omega t)\cdot\cos(\varphi)+\cos(\omega t)\cdot\sin(\varphi)]$$

$$\Rightarrow\ s(t)=p\cdot\sin(\omega t)+q\cdot\cos(\omega t) \qquad (4)$$

mit $p=\hat{s}\cdot\cos(\varphi)$ und $q=\hat{s}\cdot\sin(\varphi)$. (5)

In der Gleichung (3) sind $\hat{s}$ und φ unbekannt und wären somit zu berechnen. Durch die Anwendung des Additionstheorems und die nachfolgende Umbenennung in den Gleichungen (5) sind es nun die Größen p und q, die bestimmt werden müssen.
Wegen

$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ und $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ gilt:

$\hat{s}=\sqrt{p^2+q^2}$ und $\tan(\varphi)=\dfrac{q}{p}$ (6a; 6b)

Die ersten beiden Ableitungen der Gleichung (4) nach der Zeit lauten:

$$\dot{s}(t)=\omega p\cdot\cos(\omega t)-\omega q\cdot\sin(\omega t)$$
$$\ddot{s}(t)=-\omega^2 p\cdot\sin(\omega t)-\omega^2 q\cdot\cos(\omega t)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (2):

$$-\omega^2 p\cdot\sin(\omega t)-\omega^2 q\cdot\cos(\omega t)+2k\omega p\cdot\cos(\omega t)-2k\omega q\cdot\sin(\omega t)+\omega_0^2 p\cdot\sin(\omega t)$$
$$+\omega_0^2 q\cdot\cos(\omega t)-C\cdot\sin(\omega t)=0$$

Ausklammern des sin- und cos-Faktors:

$$\sin(\omega t)\cdot(\omega_0^2 p-\omega^2 p-2k\omega q-C)+\cos(\omega t)\cdot(\omega_0^2 q-\omega^2 q+2k\omega p)=0$$

Da diese Gleichung zu <u>jedem Zeitpunkt t</u> erfüllt sein muss (man sagt auch: identisch Null sein muss), müssen die Koeffizienten des sin- und des cos-Termes Null sein:

$$\Rightarrow \begin{cases} p\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2k\omega q-C=0 \\ q\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2k\omega p \qquad =0 \end{cases} \tag{7}$$

Dieses ist ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und den beiden Unbekannten p und q. Mit Hilfe der bekannten Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen aus der Sek. I (Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additions- bzw. Subtraktionsverfahren) lassen sich hieraus die beiden Unbekannten bestimmen.

Etwas einfacher gelingt die Lösung mit den Hilfsmitteln der linearen Algebra. Das Gleichungssystem (7) sieht dann so aus:

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & -2k\omega \\ 2k\omega & \omega_0^2-\omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen sind:

$$p=\frac{\begin{vmatrix} C & -2k\omega \\ 0 & \omega_0^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & -2k\omega \\ 2k\omega & \omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad p=\frac{\begin{vmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & C \\ 2k\omega & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & -2k\omega \\ 2k\omega & \omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix}}$$

Über welches Verfahren auch immer erhält man als Lösung:

$$p=\frac{C\cdot\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4k^2\omega^2} \quad \text{und} \quad q=\frac{-C\cdot 2k\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4k^2\omega^2}$$

Einsetzen in die Gleichungen (6a) und (6b) und anschließende Umformung liefert:

$$\hat{s}=\frac{C}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4k^2\omega^2}} \quad \text{und} \quad \tan(\varphi)=\frac{-2k\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\ . \tag{8a;8b}$$

Damit erhält man als Lösung:

$$\boxed{s(t)=\frac{C}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4k^2\omega^2}}\cdot\sin(\omega t+\varphi) \quad \text{wobei sich } \varphi \text{ aus Gleichung (8b) ergibt.}}$$

<u>Zur Erinnerung</u>: Wir haben ein schwingungsfähiges System (z.B. Federpendel, Fadenpendel, Drehpendel, elektr. Schwingkreis), welches mit der (Kreis-)Frequenz ω_0 schwingen kann. Diese Frequenz, man nennt sie Eigenfrequenz, liegt fest und ist vorgegeben durch äußere Größen (z.B. Federkonstante, Fadenlänge, Größe der schwingenden Masse oder Kapazität und Induktivität bei einem elektr. Schwingkreis).
Auf dieses System wirkt eine periodische „Erregung“ von außen ein (z.B. Kraft bzw. Wechselspannung). Die Frequenz dieser periodischen „Erregung“ ist ω. Sie ist variabel!

Folgerungen aus Gleichung (8a):

1. Für $\omega = 0$, d.h. die von Außen einwirkende Kraft ist konstant (keine zeitliche Abhängigkeit):

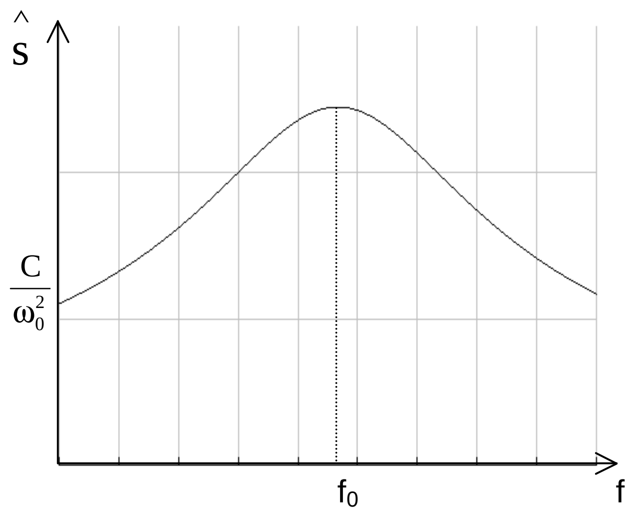
$\hat{s} = \frac{C}{\omega_0^2}$. Mit $C = \frac{\hat{F}}{m}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ (harmonische Schwingung) folgt:

$$\hat{s} = \frac{C}{\omega_0^2} = \frac{\hat{F} \cdot m}{m \cdot D} = \frac{\hat{F}}{D} \qquad \text{(Hookesches Gesetz!)}$$

2. Für $\omega = \omega_0$: $\hat{s} = \frac{C}{2k \cdot \omega_0}$ Die Amplitude im erregten System ist maximal (Resonanz). Wenn die Dämpfung 0 ist (d.h. k = 0), dann geht $\hat{s} \to \infty$ („Resonanzkatastrophe“). Für $\omega \neq \omega_0$ geht $\hat{s}$ nicht gegen Unendlich.

3. Für $\omega \to \infty$: $\hat{s} = 0$

Damit erklären sich die aufgenommen Messergebnisse:



Folgerungen aus Gleichung (8b):
Für die Phasenverschiebung φ folgt:

1. Für $\omega = 0$: $\varphi = 0$, d.h. beide Systeme schwingen gleichphasig (keine Phasenverschiebung).

2. Für $\omega = \omega_0$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Resonanz)

3. Für $\omega \to \infty$: $\varphi \to \pi$